Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2009

Wykłady 6 i 7.

Mierzalność w sensie Carathéodory'ego
Miara Lebesgue'a na prostej

27-28/10/09

ZBIORY MIERZALNE WZGLĘDEM MIARY ZEWNĘTRZNEJ

Niech $\bar{\mu}$ będzie miarą zewnętrzną na podzbiorach przestrzeni X.

Definicja: Zbiór $E \subset X$ jest *mierzalny w sensie Carathéodory'ego* (względem miary zewnętrznej $\bar{\mu}$) jeśli:

$$\forall_{A \subset X} \quad \bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(A \cap E) + \bar{\mu}(A \cap E^c).$$

Twierdzenie 1: *Zbiory mierzalne tworzą sigma-ciało.*

Dowód. Niech Σ oznacza rodzinę zbiorów mierzalnych. Jest to rodzina niepusta, gdyż zawiera X i $\emptyset$. Wprost z definicji widać, że Σ jest zamknięta na dopełnienia. Pokażemy teraz, że jest zamknięta na przekroje. Niech E i F będą mierzalne i A niech będzie dowolny. Wtedy:

$$(1) \quad \bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(A \cap F) + \bar{\mu}(A \cap F^c) = \bar{\mu}(A \cap F \cap E) + \bar{\mu}(A \cap F \cap E^c) + \bar{\mu}(A \cap F^c)$$

(najpierw skorzystaliśmy z mierzalności F, potem E). Zauważmy, że dla zbioru $C = (A \cap F \cap E^c) \cup (A \cap F^c)$, jego przekroje z F i F^c są równe odpowiednio składnikom tej sumy. Zatem, z mierzalności F, miara tej sumy jest równa sumie miar składników. Zatem we wzorze (1), dwa ostatnie wyrazy dają w sumie właśnie $\mu(C)$. Dalej zauważmy, że

$$C = A \cap ((F \cap E^c) \cup F^c) = A \cap (E^c \cup E^c) = A \cap (E \cap F)^c.$$

Czyli pokazaliśmy $\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(A \cap F \cap E) + \bar{\mu}(A \cap (E \cap F)^c)$, a to jest właśnie warunek na mierzalność $E \cap F$.
Ponieważ Σ jest zamknięta na dopełnienia i przekroje, zatem jest ciałem (w szczególności jest zamknięta na różnice zbiorów). Z zadania 10 z listy 1 wynika, że Σ bedzie sigma-ciałem, jeśli pokażemy jej zamkniętość na przeliczalne sumy rozłączne.
Niech E_n będzie ciągiem parami rozłącznych zbiorów mierzalnych i niech $A \subset X$ będzie dowonym zbiorem. Każda suma skończona zbiorów E_n jest mierzalna, zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k) + \bar{\mu}(A \cap \bigcap_{k=1}^{n} E_k^c)$$

Ostatni człon się nie zwiększy, jeśli weźmiemy przekrój po k do nieskończoności (monotoniczność miary zewnętrznej). Miarę tego przekroju oznaczmy przez Ł. Z prawa de Morgana,

$$\text{Ł} = \bar{\mu}(A \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\big)^c).$$

Czyli mamy:

$$\bar{\mu}(A) \geq \bar{\mu}(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k) + \text{Ł}$$

Ponieważ zbiory E_k są rozłączne i mierzalne, łatwo jest pokazać (indukcyjnie), że

$$\bar{\mu}(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{\mu}(A \cap E_k).$$

Czyli

$$\bar{\mu}(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \bar{\mu}(A \cap E_k) + \text{Ł}.$$

Przechodząc z n do nieskończoności i korzystając z przeliczalnej podaddytywności miar zewnętrznych dostajemy:

$$\bar{\mu}(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(A \cap E_k) + \text{Ł} \geq \bar{\mu}(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) + \text{Ł}.$$

Wstawiając Ł otrzymujemy

$$\bar{\mu}(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(A \cap E_k) + \text{Ł} \geq \bar{\mu}(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) + \bar{\mu}(A \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\big)^c).$$

Z podaddytywności miary zewnętrznej ostatnia suma jest nie mniejsza niż $\bar{\mu}(A)$, zatem jest równość, czyli przeliczalna suma rozłączna zbiorów E_n jest mierzalna. To kończy dowód. $\square$

Uwaga: W szczególności pokazaliśmy równość:

$$\bar{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(A \cap E_k) + \bar{\mu}(A \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\big)^c).$$

Twierdzenie 2: *Miara zewnętrzna $\bar{\mu}$ obcięta do sigma-ciała Σ zbiorów mierzalnych jest miarą (przeliczalnie addytywną).*

Dowód. Dla ciągu parami rozłącznych zbiorów mierzalnych E_n trzeba do powyższej uwagi wstawić $A = \bigcup_k E_k$. $\square$

MIARA LEBESGUE'A NA PROSTEJ

Chcemy zbudować miarę na λ pewnym sigma-ciele Σ podzbiorów prostej $\mathbb{R}$ o następujących własnościach:

1. Σ zawiera wszelkie przedziały postaci $[a,b)$ $(a,b\in\mathbb{R})$, $a<b$ oraz
2. $\lambda([a,b)) = b-a$.

Uwaga: Do warunku pierwszego wystarczy zawieranie wszystkich półprostych $(-\infty,a)$ $(a\in\mathbb{R})$. Jest on równoważny z tym, że Σ zawiera sigma-ciało zbiorów borelowskich.

Uwaga: Warunek drugi implikuje, że miara przedziału od a do b wynosi $b-a$ niezależnie od tego jakie są końce tego odcinka (otwarte czy domknięte, czy jeden taki drugi siaki). Implikację tą dowodzi się korzystając na przykład z ciągłości miary z dołu.

Dodatkowo nasza miara będzie *niezmiennicza na przesunięcia*, tzn. jeśli dla $A\subset\mathbb{R}$ i $t\in\mathbb{R}$ przez $A+t$ oznaczymy zbiór $\{x+t : x\in A\}$, to dla dowolnego $E\in\Sigma$ i $t\in\mathbb{R}$ $E+t\in\Sigma$ oraz $\mu(E+t)=\mu(E)$. Miarę tą nazwiemy *miarą Lebesgue'a* na prostej.

Oto konstrukcja tej miary:

Krok I:
Na rodzinie $\mathcal{A}$ przedziałów postaci $[a,b)$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$ określamy funkcję ,,masy" ν (my będziemy ją nazywać ,,długość") wzorem

$$\nu([a,b)) = b-a.$$

Krok II:
Określamy miarę zewnętrzną

$$\bar{\lambda}(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\nu([a_n,b_n)) : A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)\}$$

(na ostatnim wykładzie uzasadniono, że to faktycznie jest miara zewnętrzna).
Krok III:
Niech Σ oznacza sigma-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego względem miary zewnętrznej $\bar{\lambda}$. Obcięcie $\bar{\lambda}$ do Σ jest miarą. Oznaczamy je przez λ.

To jest koniec konstrukcji. Trzeba sprawdzić własności 1., 2. oraz niezmienniczość na przesunięcia. Do 1-ki wystarczy sprawdzić półproste:

Twierdzenie 3: Dowolna półprosta postaci $(-\infty,a)$ $(a\in\mathbb{R})$ jest mierzalna względem miary zewnętrznej Lebesgue'a $\bar{\lambda}$.

Dowód. Niech $A\subset\mathbb{A}$ będzie dowolnym zbiorem. Niech $\{[a_n,b_n) : n\in\mathbb{N}\}$ będzie ciągiem (różnych) przedziałów pokrywającym A (w skrócie *pokryciem* A) takim, że $\sum_n(b_n-a_n)\le\bar{\lambda}(A)+\epsilon$ (istnienie takiego pokrycia wynika wprost z określenia miary zewnętrznej $\bar{\lambda}$ w kroku II). Poklasyfikujmy liczby naturalne n, ze względu na trzy możliwe przypadki: te, dla których $a\le a_n$ (zbiór $\mathbb{N}_1$), te, dla których

$a_n < a < b_n$ (zbiór $\mathbb{N}_2$) i te, dla których $b_n \leq a$ (zbiór $\mathbb{N}_3$). Utwórzmy dwie (przeliczalne) rodziny przedziałów : pierwsza niech składa się z przedziałów $[a_n, b_n)$ dla $n \in \mathbb{N}_3$ oraz $[a_n, a)$ dla $n \in \mathbb{N}_2$, a druga z $[a_n, b_n)$ dla $n \in \mathbb{N}_1$ oraz $[a, b_n)$ dla $n \in \mathbb{N}_2$. Łatwo zauważyć, że pierwsza rodzina pokrywa $A \cap (-\infty, a)$, a druga $A \cap [a, \infty)$. Zatem suma długości przedziałów z pierwszej rodziny jest nie mniejsza niż $\bar{\lambda}(A \cap (-\infty, a))$, a z drugiej nie mniejsza niż $\bar{\lambda}(A \cap [a, \infty))$. Dodając te miary, dostaniemy

$$\bar{\lambda}(A \cap (-\infty, a)) + \bar{\lambda}(A \cap [a, \infty)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_3}(b_n - a_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}_2}(a - a_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}_1}(b_n - a_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}_2}(b_n - a).$$

Połączenie drugiej i ostatniej sumy daje $\sum_{n \in \mathbb{N}_2}(b_n - a_n)$. Czyli otrzymujemy po prostu:

$$\bar{\lambda}(A \cap (-\infty, a)) + \bar{\lambda}(A \cap [a, \infty)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}(b_n - a_n) < \bar{\lambda}(A) + \epsilon.$$

Ponieważ ϵ jest dowolny (nieujemny), mamy

$$\bar{\lambda}(A \cap (-\infty, a)) + \bar{\lambda}(A \cap [a, \infty)) \leq \bar{\lambda}(A).$$

Przeciwna nierówność jest oczywista z podaddytywności miar zewnętrznych. Uzyskana powyżej równość dowodzi mierzalności półprostej $(-\infty, a)$. $\square$

Zajmiemy się teraz własnością 2., czyli zagadnieniem, ile wynosi miara Lebesgue'a przedziału $[a, b)$.

Twierdzenie 4: Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wtedy $\lambda([a, b)) = b - a$.

Dowód. Nierówność $\lambda([a, b)) \leq b - a$ wynika z definicji miary zewnętrznej $\bar{\lambda}$ (a przecież $\lambda = \bar{\lambda}$ na zbiorach mierzalnych) oraz tego, że odcinek $[a, b)$ można pokryć ciągiem odcinków postaci $[a_0, a_1), [a_1, a_2), \ldots, [a_{n-1}, a_n), \ldots$, gdzie $a_0 = a, a_n \in [a, b)$ jest ciągiem rosnącym o granicy b. Wtedy szereg $a_n - a_{n-1}$ ma sumę $b - a$, a więc $\bar{\lambda}([a, b))$ nie może być większa.
Przeciwna nierówność jest nieco trudniejsza. Trzeba pokazać, że nie ma pokrycia odcinka $[a, b)$ odcinkami $[a_n, b_n)$ o sumie długości mniejszej niż $b-a$. Więc rozważmy dowolne takie pokrycie. Wtedy istnieje n_0 takie, że $a \in [a_{n_0}, b_{n_0})$. Punkt $x = b_0$ spełnia następujący warunek:

(*) $x > a$ oraz istnieje podzbiór $\mathbb{N}_x \subset \mathbb{N}$ taki, że

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_x} b_n = x \quad \text{oraz} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}_x}(b_n - a_n) \geq x - a.$$

(Dla $x = b_{n_0}$ tym podzbiorem jest $\{n_0\}$). Tak więc zbiór X punktów x spełniających warunek (*) jest niepusty. Łatwo zauważyć, że $x_s = \sup X$ jest elementem X, to znaczy $\sup X = \max X$. Oto dlaczego: Oczywiście x_s jest granicą rosnącego ciągu x_k punktów z X. Wystarczy teraz za $\mathbb{N}_{x_s}$ wziąć sumę mnogościową $\bigcup_k \mathbb{N}_{x_k}$. Supremum prawych końców b_n po $n \in \mathbb{N}_{x_s}$ wynosi $\sup x_k = x_0$, a suma długości przedziałów jest nie mniejsza niż $x_k - a$ dla każdego k, czyli wynosi co najmniej $x_0 - a$.

Udowodnimy teraz, że $x_s \geq b$. Załóżmy, że $x_s < b$. Wtedy istnieje odpowiedni zbiór $\mathbb{N}_{x_s}$ oraz istnieje n_0 takie, że $x_s \in [a_{n_0}, b_{n_0})$. Oczywiście $b_{n_0} > x_s$. Z tego wynika, że $n_0 \notin \mathbb{N}_{x_s}$ (przedziały o numerach $n \in \mathbb{N}_{x_s}$ mają prawy koniec b_n nie większy od x_s). Niech $x = b_{n_0}$. Pokażemy, że $x \in X$, co będzie sprzecznością. Za $\mathbb{N}_x$ weźmy $\mathbb{N}_{x_s} \cup \{n_0\}$. Największym prawym końcem jest teraz b_{n_0} czyli x co zgadza się z pierwszym warunkiem na $\mathbb{N}_x$. Suma długości przedziałów o indeksach w $\mathbb{N}_x$ wynosi: suma długości przedziałów o indeksach w $\mathbb{N}_{x_s}$, która jest nie mniejsza niż $x_s - a$ PLUS $b_{n_0} - a_{n_0}$ (bo indeks n_0 nie wstępował w poprzedniej sumie). To ostatnie wynosi co najmniej $x - x_s$ (bo $b_{n_0} = x$ oraz $a_{n_0} \leq x_s$). Zatem cała suma wynosi co najmniej $x_s - a + x - x_s = x - a$. Otrzymaliśmy, że $x \in X$, co przeczy temu, że x_s jest maximum X. Sprzeczność ta dowodzi, że $x_s \geq b$. Suma długości wszystkich przedziałów pokrycia jest zatem co najmniej $x_s - a \geq b - a$. $\square$

Teraz udowodnimy (łatwiejszą już) niezmienniczość miary λ na przesunięcia.

Twierdzenie 5: *Dla dowolnego $E \in \Sigma$ i $t \in \mathbb{R}$ mamy $E + t \in \Sigma$ oraz*

$$\lambda(E + t) = \lambda(E).$$

Dowód. Najpierw wykażemy, że miara zawnętrzna $\bar{\lambda}$ jest niezmiennicza na przesunięcia. Zauważmy, że $\{[a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ jest pokryciem zbioru A wtedy i tylko wtedy gdy $\{[a_n + t, b_n + t) : n \in \mathbb{N}\}$ jest pokryciem zbioru $A + t$. Suma długości jest taka sama dla obu tych pokryć. Zatem $\bar{\lambda}(A + t)$ (jako odpowiednie infimum) jest równe $\bar{\lambda}(A)$.

Niech teraz E będzie zbiorem mierzalnym. Chcemy zbadać mierzalność $E + t$. Dla dowolnego $A \subset \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}(A) = \bar{\lambda}(A - t) = \bar{\lambda}((A - t) \cap E) + \bar{\lambda}((A - t) \cap E^c) = \\ \bar{\lambda}(((A - t) \cap E) + t) + \bar{\lambda}(((A - t) \cap E^c) + t) = \\ \bar{\lambda}(A \cap (E + t)) + \bar{\lambda}(A \cap (E^c + t)).\end{aligned}$$

Dowód mierzalności $E + t$ kończy spostrzeżenie, że $E^c + t = (E + t)^c$. Ponieważ na zbiorach mierzalnych $\lambda = \bar{\lambda}$ dostajemy niezmienniczość miary λ na przesunięcia. $\square$